

422 ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2016
ΤΜΗΜΑ Α

1) Έστω m φυσικός μεγαλύτερος του 1 και το σύνολο
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} [1] & [a] \\ [0] & [b] \end{pmatrix} \mid [0], [1], [a], [b] \in \mathbb{Z}_m \text{ και } (a, m) = 1 \right\}$$
. Δείξτε ότι το σύνολο A είναι ομάδα με τον πολλαπλασιασμό των πινάκων και να βρείτε την τάξη της. (1)

2) Να βρεθούν όλες οι ισόμορφες αβελιανές ομάδες τάξης 36. Να ορισθεί ισομορφισμός ομάδων μεταξύ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ και $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. (1)

3) Μια ομάδα δεν μπορεί να είναι η ένωση δυο γνήσιων διαφορετικών υποομάδων της. (1)

4) Βρείτε όλες τις υποομάδες της $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$. Ποιές είναι κανονικές; (1)

5) Να περιγράψετε την ομάδα πηλίκο \mathbb{Q}/\mathbb{Z} με τις συνήθεις πράξεις και να δείξετε ότι είναι άπειρη και κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη. (1.5)

6) α) Έστω η μετάθεση $\sigma = (1, 2, 3)(2, 3, 4)(3, 4, 5)(5, 6, 7)$. Να βρεθεί η σ^{-1} και η τάξη της. Είναι άρτια ή περιπτή;

β) Να βρεθεί μετάθεση σ με $\sigma^2 a = \beta$, όπου $a = (1, 2, 5, 7)$ και $\beta = (3, 4, 7, 5, 6, 2)$. (1)

7) Δείξτε ότι το σύνολο $3\mathbb{Z}$ είναι πρώτο ιδεώδες του δακτυλίου \mathbb{Z} με τις συνήθεις πράξεις. Βρείτε όλα τα ιδεώδη του υποδακτυλίου $3\mathbb{Z}$. Είναι το $6\mathbb{Z}$ πρώτο ιδεώδες στον $3\mathbb{Z}$; Είναι μέγιστο; Ισχύει ότι $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$; Εξηγήστε πλήρως. (1.5)

8) Εξετάστε αν το πολυώνυμο $f(x) = x^2 + 2$ είναι ανάγωγο στο δακτύλιο $\mathbb{R}[x]$. Αν I είναι το ιδεώδες που γεννιάται από το $f(x)$, περιγράψτε πλήρως το δακτύλιο $\mathbb{R}[x]/I$. (2)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ